# ファクターの内部自己同型写像の接合積への拡張 (作用素環の研究とその応用)



長田, まりゑ

数理解析研究所講究録
314巻 1977年 1-12



# ファクターの内部自己同型写像の接合積への拡張

大阪教育大　　長田　まりゑ

$\mathcal{A}$ を von Neumann algebra, $G$ を discrete countable group, $\alpha$ を $G$ から $\mathcal{A}$ の automorphism group への表現とし，$\mathcal{A}$ の $G$ による $\alpha$ に関する接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ を $\mathcal{M}$ で表わすことにする。$\mathcal{A}$ の automorphism の拡張となっている $\mathcal{M}$ の automorphism 全体のなす群を $Aut(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ で，$\mathcal{A}$ の automorphism の拡張となっている $\mathcal{M}$ の inner automorphism 全体のなす群を $Int(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ で表わす．$Aut(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の研究は，まず，Singer によって，group measure space construction による finite factor $\mathcal{M}$ に対してなされた([13])．$G$ を $\mathcal{A}$ の freely acting automorphism のなす群としたとき，$Int(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の要素の構造に関する，いくつかの結果は [2]，[3]，[9]，[11] で得られ，[1] に於て，$Aut(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の Singer の結果の拡張がこころみられている。又 $Aut(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の要素と $G$ の 2-cocycle との関係が，von Neumann algebra の群による接合積の一般化を考えることにより，[7]，[12]，[4]

[16] 等で得られている。

ここでは、$\mathcal{A}$はファクターと仮定し、$\mathrm{Int}(\mathcal{M},\mathcal{A})$及び$\mathcal{A}$上ではinner automorphismであるような$\mathcal{M}$のautomorphism全体のなす群を、群$G$との関連のもとで、決定付ける問題について記す。

尚、ここでは話を統一する為に、扱う群$G$はdiscrete countable groupとするが註で述べるように、結果のあるものは、$G$がlocally compact groupのときも成立する([6])。又、接合積$R(G,\mathcal{A},\alpha)$と共に、接合積$R(G,\mathcal{A},\alpha,v)$(一般化された接合積で定義は下記)も取り扱う。

## Int($\mathcal{M}$, $\mathcal{A}$)について.

$\mathcal{A}$をseparable Hilbert space上のvon Neumann algebraとし、$\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Out}(\mathcal{A})$によって、夫々$\mathcal{A}$上のautomorphism, inner automorphism, outer automorphism全体のなす群を示す。

$G$をdiscrete countable group, $\alpha$を$G$から$\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$への写像で、次の条件(1)を充すものとする;

(1) $\alpha_{gh}^{-1}\alpha_g\alpha_h \in \mathrm{Int}(\mathcal{A})$, $g, h \in G$.

この(1)のinner automorphismを$i(g,h)$で記す。$G$の単位元1に対して、$\alpha_1$がidentity automorphismでないときには、

$\alpha_g \alpha_1^{-1}$ を $\alpha_g$ とおくことにより，$\alpha_1$ は identity automorphism であると仮定することができる。$\mathcal{A}$ のユニタリの族 $\{v(g,h);\ g,h \in G\}$ が，次の二つの関係式を充たすとき，$(G, \alpha)$ に関する factor set とよぶ；

$$\begin{cases} (2) \quad i(g,h)(x) = \mathrm{Ad}\, v(g,h)(x) = v(g,h)\, x\, v(g,h)^*, & x \in \mathcal{A} \\ (3) \quad v(g,hk)\, v(h,k) = v(gh,k)\, \alpha_k^{-1}(v(g,h)), & g,h,k \in G. \end{cases}$$

$\mathcal{A}$ の各元 $x$ と，$G$ の各元 $g$ に対し，

$$\begin{cases} (4) \quad (\pi_\alpha(x)\xi)(g) = \alpha_g^{-1}(x)\,\xi(g), & \xi \in l^2(\mathcal{G}, G),\ g \in G \\ (5) \quad (\rho_g \xi)(h) = v(g, g^{-1}h)\,\xi(g^{-1}h) & \xi \in l^2(\mathcal{G}, G),\ h \in G \end{cases}$$

とおくと，$\pi_\alpha$ は $\mathcal{A}$ の $l^2(\mathcal{G}, G)$ 上への normal representation となり，$\rho_g$ は各 $g$ に対して，ユニタリとなる。又，次の二式

$$\begin{cases} (6) \quad \rho_g \rho_h = \rho_{gh}(\pi_\alpha(v(g,h))), & (g, h \in G) \\ (7) \quad \pi_\alpha(\alpha_g(x)) = \rho_g\, \pi_\alpha(x)\, \rho_g^*, & (x \in \mathcal{A},\ g \in G) \end{cases}$$

が充される。$l^2(\mathcal{G}, G)$ 上の $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ と $\rho_G$ によって生成された von Neumann algebra を $R(G, \mathcal{A}, \alpha, v)$ で示す。もし，$\alpha$ が表現で，$G$ の全ての元 $g$，$h$ に対して，$v(g,h)$ = 恒等作用素となるときは，$R(G, \mathcal{A}, \alpha, v)$ は通常の接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ に他ならない。

$R(G, \mathcal{A}, \alpha, v)$ を $\mathcal{M}$ で表わし，

$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \{\beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M});\ \beta(\pi_\alpha(\mathcal{A})) = \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$

$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A}) = \{\beta \in \mathrm{Int}(\mathcal{M});\ \beta(\pi_\alpha(\mathcal{A})) = \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$

とおく。

以下，$\pi_\alpha(v(g,h))$ を改めて，同じ記号 $v(g,h)$ で記す．又 $\mathcal{A}$ の inner automorphism 及び $\alpha_g$ ($g\in G$) は，そのまゝ自然な形で，$\mathcal{M}$ の automorphism に拡張することができるので，同じ記号 $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$，及び $\alpha_g$ ($g\in G$) でもって，拡張された $\mathcal{M}$ の automorphism の群及び automorphism を表わすことにする；

$$\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = \{ \mathrm{Ad}\, u \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})\ ;\ u \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))\}$$

$$\alpha_g = \mathrm{Ad}\, \rho_g|_{\mathcal{M}} \qquad g\in G,$$

ただし，$\mathcal{U}(\mathcal{A})$ は von Neumann algebra $\mathcal{A}$ のユニタリの群。$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ 及び $\alpha_G$ は共に $\mathrm{Int}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ の部分集合であるが，それらによって $\mathrm{Int}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ は完全に決定付けることができる。

仮定 (*) $\left(\begin{array}{l}\mathcal{A} \text{ を factor，} G \text{ を discrete countable group，}\\ \alpha \text{ を (1) を充す } G \text{ から } \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) \text{ への写像．}\end{array}\right.$

仮定 (**) $\left(\begin{array}{l}\text{(*) と同じ，} \mathcal{A}, G, \alpha \text{ に対して，単位元を除く全て}\\ \text{の } g\in G \text{ に対して } \alpha_g \in \mathrm{Out}(\mathcal{A}).\end{array}\right.$

$$\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A}) = \{ u \in \mathcal{U}(\mathcal{M})\ ;\ u\,\pi_\alpha(\mathcal{A})\,u^* = \pi_\alpha(\mathcal{A})\}$$

とおく．

<u>定理 1</u>．(*) のもとで，$\mathcal{U}(\mathcal{M},\mathcal{A})$ の各要素 $u$ は，

(8) $\qquad u = w w' \rho_g, \qquad w\in\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})),\ w'\in\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})'\cap\mathcal{M}),\ g\in G$

とかける。(**) のもとでは，

(9) $\qquad u = w\rho_g, \qquad w\in\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})),\ g\in G$

と唯一通りにかける。

(証明) [5, Lemma 1] によって, $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の元 $u$ の Fourier 展開を $u = \sum_{g \in G} u(g) \rho_g \quad (u(g) \in \pi_\alpha(\mathcal{A}))$ とする。$u$ は $u \pi_\alpha(\mathcal{A}) u^* = \pi_\alpha(\mathcal{A})$ を充すから，全ての $a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$ に対して,

$$\sum_{g \in G} u(g) \alpha_g(a) \rho_g = \sum_{g \in G} u a u^* u(g) \rho_g$$

を充す。従って $u(g) \alpha_g(a) = u a u^* u(g)$ が全ての $a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$ と $g \in G$ に対して成立つ. $\alpha_g^{-1} \mathrm{Ad}\, u$ が $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ の outer automorphism であれば, $u(g) = 0$ とならなければならない。仮定より $u$ はユニタリであるから, $\alpha_g^{-1} \mathrm{Ad}\, u$ が $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ 上で inner となる $g \in G$ が存在する. $w$ を $\alpha_g^{-1} \mathrm{Ad}\, u = \mathrm{Ad}\, w$ となる $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ のユニタリとし $w' = \rho_g^* u w^*$ とおくと, (8) の関係が得られる. 特に, $\alpha_g \in \mathrm{Out}(\mathcal{A})$ $(g \neq 1)$ ならば, [5, Corollary 3] により, $\pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ は scalar 全体と同型であるから, (8) より, $u = w \rho_g \quad (w \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(A)),\ g \in G)$ とかける。もし,

(10) $\quad w_1 \rho_g = w_2 \rho_h \quad , \quad w_1, w_2 \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(A)),\ g, h \in G$

ならば,

(11) $\quad w_2^* w_1 = \rho_h \rho_g^* = \rho_{hg^{-1}} v(h, g^{-1}) v(g, g^{-1})$

が成立つ. 他方 [4, Theorem 6] により, $\mathcal{M}$ から $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ の上への faithful normal expectation $\epsilon$ で $\epsilon(\rho_g) = 0$ を単位元を除く $G$ の全の元 $g$ に対して充すものが存在する。従って, もし (10) が $g \neq h$ なる $g, h \in G$ に対して成り立つならば, (11)

により $w_2^* w_1 = 0$ となり矛盾。従って、(9) の分解は唯一通りである。//

<u>系 2</u> (*) のもとで、$\mathcal{M}$ の inner automorphism に拡張できる $\mathcal{A}$ の automorphism $\beta$ は次の形のものに限る。

$$(12) \qquad \beta = i_\beta \cdot \alpha_g \qquad i_\beta \in \mathrm{Int}(\mathcal{A}),\ g \in G.$$

集合 $\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})) \times G$ に対して、次の関係 (13) で積を定義すると、この集合は一つの群になる;

$$(13) \quad (w_1, g)(w_2, h) = (w_1 \alpha_g(w_2) \alpha_{gh}(v(g,h)),\ gh).$$

この群を $\mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ の $G$ による extension group といい、$E(G, \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), \alpha, v)$ で表わす。

<u>系 3</u> (**) のもとで、$\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ は $E(G, \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), \alpha, v)$ と同型である。又 $\mathcal{M}$ が通常の接合積 $R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ ならば、$\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ は $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ と $G$ の semi-direct product と同型である。

(証) 定理 1 により、$\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の元 $u$ は $u = w f_g$, $g \in G$, $w \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ と唯一通りにかける。$E(G, \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), \alpha, v)$ から $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ への写像 $\sigma$ を $\sigma(w, g) = w f_g$, ($w \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$, $g \in G$) で定義すると、$\sigma$ は $E(G, \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})), \alpha, v)$ から $\mathcal{U}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ への同型写像となる。//

同様にして，集合 $\mathrm{Int}(\mathcal{A})\times G$ に対して次の関係式(14)で積を定義すると，この集合は群になる；

(14) $\quad (\mathrm{Ad}\,u, g)(\mathrm{Ad}\,w, h) = (\mathrm{Ad}(u\alpha_g(w)\alpha_{gh}(v(g,h)), gh).$

この群を $E(G, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \alpha, v)$ と書き，$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ の $G$ による積(14)のもとでの extension group と呼ぶ．

<u>系4</u> (**)のもとで，$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ は $E(G, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \alpha, v)$ と同型であり，$\mathcal{M} = R(G, \mathcal{A}, \alpha)$ ならば，$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ は $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ と $G$ との semidirect product である．

(証明) 定理1により，$\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の元 $\beta$ は $\mathrm{Ad}\,u\cdot\alpha_g$ とかけ，その分解の仕方は唯一通りである．$\sigma$ を $E(G, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \alpha, v)$ から $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ への写像で $\sigma(\mathrm{Ad}\,u, g) = \mathrm{Ad}(u\rho_g)$，$(u\in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$, $g\in G)$ なるものとすると，$\sigma$ は $E(G, \mathrm{Int}(\mathcal{A}), \alpha, v)$ から $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ への同型写像となる//

<u>$\mathcal{A}$ の inner automorphism group の拡張全体について</u>

ここでは $\mathcal{A}$ の inner automorphism の $\mathcal{M}$ への拡張全体のなす群の構造について記す．

$K = \{\beta\in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})\,;\ \beta|_{\pi_\alpha(\mathcal{A})}$ is inner on $\pi_\alpha(\mathcal{A})\}$

とおく．$K$ は $\mathrm{Int}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ と共に，$\mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ の normal subgroup であるが，この群 $K$ を $G$ との関連のもとで決定付ける．

$\chi(G)$ を $G$ の character 全体のなす群とする。

補題5　(**) のもとで $K$ の元 $\beta$ に対して，次の (15) を充す $x \in \chi(G)$ と $u \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ が存在する；

$$(15) \qquad \beta(\rho_g) = x(g)\, u\, \rho_g\, u^*, \qquad g \in G.$$

(証明)　$\beta \in K$ より $\beta(a) = u a u^*$ を全ての $a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$ に対して充す $u \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ が存在する。各 $g \in G$ に対して，

$$\beta(\rho_g)\, u\, a\, u^*\, \beta(\rho_g)^* = \beta(\rho_g\, a\, \rho_g^*)$$
$$= u\, \rho_g\, a\, \rho_g^*\, u$$

が成立つから，$\rho_g^* u^* \beta(\rho_g) u \in \pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ が成立する。仮定の $\alpha_g \in Out(\mathcal{A})$ $(g \neq 1)$ より，$\pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ はスカラー全体と同型である。$x(g) I = \rho_g^* u^* \beta(\rho_g) u$ とおくと関係式 (15) が成立する。$G$ の元 $g, h$ に対して，

$$x(gh) I = \rho_{gh}^* u^* \beta(\rho_{gh}) u = \rho_{gh}^* u^* \beta(\rho_g \rho_h v(g,h)^*) u$$
$$= x(g)\, x(h)\, I,$$

より $x \in \chi(G)$ を得る//

$\chi(G)$ の元 $x$ に対して，

$$(u_x \xi)(g) = \overline{x(g)}\, \xi(g), \qquad g \in G,\ \xi \in \ell^2(\mathcal{H}, G)$$

とおくと

$$(16) \qquad u_x\, a\, u_x^* = a, \qquad a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$$

$$(17) \qquad u_x\, \rho_g\, u_x^* = \overline{x(g)}\, \rho_g, \qquad g \in G$$

を充すから $\delta_x \equiv \mathrm{Ad}\, u_x | \mathcal{M}$ とすると，$\delta_x \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ となる.

<u>定理6</u> $(**)$のもとで，群 $K$ は $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ と $\mathcal{X}(G)$ の direct product と同型である.

(証明) $K$ の元 $\beta$ に対して (15) を充す $u \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A}))$ と $\chi \in \mathcal{X}(G)$ を取る．この $\chi$ に対して $\delta_\chi$ を考えると.

$$\beta \cdot \delta_\chi(a) = \beta(a) = \mathrm{Ad}\, u\,(a) \qquad a \in \pi_\alpha(\mathcal{A})$$

$$\beta \cdot \delta_\chi(\rho_g) = \overline{\chi(g)}\,\beta(\rho_g) = \mathrm{Ad}\, u\,(\rho_g) \qquad g \in G$$

が成立つ．$\mathcal{M}$ は $\pi_\alpha(\mathcal{A})$ と $\rho_G$ によって生成されているから，$\beta = \mathrm{Ad}\, u \cdot \delta_\chi^{-1}$ と分解できる．$\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ と $\mathcal{X}(G)$ の direct product から $K$ への写像 $\sigma$ を $\sigma(\mathrm{Ad}\, u, \chi) = \mathrm{Ad}\, u \cdot \delta_\chi$ と定義すると，この $\sigma$ は同型写像になる．実際，もし $\mathrm{Ad}\, u \cdot \delta_\chi = \mathrm{Ad}\, w\, \delta_{\chi'}$ $(u, w \in \mathcal{U}(\pi_\alpha(\mathcal{A})),\ \chi, \chi' \in \mathcal{X}(G))$ が成立つならば，$\mathrm{Ad}\, w^* u = \delta_{\chi'\chi^{-1}}$ が成立つ．従って，$\mathrm{Ad}\, w^* u | \pi_\alpha(\mathcal{A})$ は identity automorphism となり，$w$ と $u$ はスカラーしか異ならないから $\mathrm{Ad}\, u | \mathcal{M} = \mathrm{Ad}\, w | \mathcal{M}$ となる．故に $\delta_\chi = \delta_{\chi'}$ となり (17) より $\chi = \chi'$ を得る。

系7 $(**)$のもとで，

$$K_0 = \{\beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}, \mathcal{A})\ ;\ \beta | \pi_\alpha(\mathcal{A}) \text{ は identity automorphism}\}$$

とおくと，$K_0$ は $\mathcal{X}(G)$ と同型である。

群 $G$ に対し交換子群 $[G,G]$ ($\{ghg^{-1}h^{-1}; g, h \in G\}$ の生成する群) が $G$ と一致するとき，$G$ は完全群であるという.

<u>系 8</u> $(**)$ のもとで，次の (18), (19), (20) は同値である.

(18) $K = \mathrm{Int}(\mathcal{A})$

(19) $K_0 = \{1\}$

(20) $G$ は完全群である.

(証明) 定理 6 より (18), (19) 及び $\chi(G) = \{1\}$ は同値である。$\mathbb{T}$ を複素平面の単位円周とすると $\chi(G)$ は $G$ から $\mathbb{T}$ への homomorphism 全体のなす群 $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ である。$\mathbb{T}$ は可換群だから $[G,G]$ は $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ の各元の kernel に含まれる。従って，$\chi(G)$ と $\mathrm{Hom}(G/[G,G], \mathbb{T})$ は同型な群である. 故に，$\mathrm{Hom}(G/[G,G], \mathbb{T}) = \{1\}$ と $\chi(G) = \{1\}$ は同値で，それは，$G/[G,G]$ が trivial なる事と同値である//

(註) $(*)$ のもとで，$\alpha_g \in \mathrm{Out}(\mathcal{A})$ $(g \neq 1)$ なる事と $\pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ がスカラー全体と同型である事とは同値である。$K$ に関する結果は $G$ が locally compact group のとき，$\alpha$ が $\pi_\alpha(\mathcal{A})' \cap \mathcal{M}$ がスカラー全体となるような continuous action であれば，そのまゝ成立する。又最近，$\mathcal{A}$ を von Neumann algebra，$\alpha$ を $G$ から $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ への $\alpha_g$ が freely acting on $\mathcal{A}$ $(g \neq 1)$ となるような写像

のときに，上の群 $K$ に対する定理 6 は拡張されることが示された（[17]）。

## References


[1] H. Behncke, Automorphisms of crossed product, Tohoku Math. J., 21(1969), 580-600.

[2] H. Choda and M. Choda, On extensions of automorphisms of abelian von Neumann algebras, Proc. Japan Acad., 43(1967) 295-299.

[3] H. Choda, On freely acting automorphisms of operator algebras, Kodai Math. Sem. report, 26(1974), 1-21.

[4] M. Choda, Some relations of $II_1$-factors on free groups, to appear in Math. Japonicae.

[5] ________, A characterization of crossed products of factors by discrete outer automorphism groups, Preprint.

[6] ________, Extensions of the inner automorphism group of a factor. preprint.

[7] J. Feldman and C.C,Moore, Ergodic equivalence relations, cohomology and von Neumann algebras, II, Preprint.

[8] E. Hewitt and K.A.Ross, Abstract harmonic analysis, I. Springer-Verlag.

[9] Y. Haga and Z.Takeda, Corespondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 19(1967), 315-323.

[10] R.R.Kallman, A generalization of free action, DUke Math. J., 36(1969), 781-789.

[11] M.Nakamura and Z. Takeda, On inner automorphisms of

certain finite factors, Proc. Japan Acad., 37(1961), 31-32.

[12] __________, On extensions of finite factors, I, Proc. Japan Acad., 34(1959), 149-154.

[13] I.M. Singer, Automorphisms of finite factors, Amer. J. Math., 17(1955), 117-183.

[14] C. E. Sutherland, Cohomology and extensions of von Neumann algebras, I, II, Preprints

[15] M. Takesaki, Duality for crossed products and the stracture of von Neumann algebras of type III, Acta Math., 131(1974), 249-310.

[16] G. Zeller-Meier, Produits croises d'une C*-algebra par un groupe d'automorphismes, J. Math. pures et Appl., 47 (1968), 101-239.

[17] Y. Watatani, An extension of the inner automorphism group of a von Neumann algebra, 準備中.